Ch 1: Numerical analysis

Curve fitting توفيق المنحنيات

$y = ax + b$

ـ هو: عملية توفيق النقط. بحيث تقع على خط مستقيم وإذا لم تقع النقطه عليه تكون قريبه جداً منه

← من الجدول مطلوب معرفه معادلة الخط

$y = ax + b$

x_i	x_1	x_2	- - -	x_n
y_i	y_1	y_2	- - -	y_n

الحل: تعتمد فكرة الحل على ايجاد الميل الانسب للخط والجزء المقطوع من محور (y) مع فرق النقط القريبه من الخط اى تحقق معادلته

$(x_1, y_1) \longrightarrow y_1 = ax_1 + b$ $\quad *$

$(x_2, y_2) \longrightarrow y_2 = ax_2 + b$ $\quad **$

$\vdots$

$(x_n, y_n) \longrightarrow y_n = ax_n + b$

بالجمع $\longrightarrow y_1 + y_2 + \cdots y_n = a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + b \cdots + b$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb \qquad (1)$$

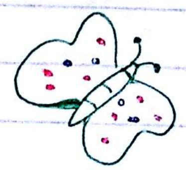
بضرب * فى x_1 & ضرب ** x_2 وهكذا . . . .

$x_1 y_1 = a x_1^2 + b x_1$

$x_2 y_2 = a x_2^2 + b x_2$

$\vdots$

$x_n y_n = a x_n^2 + b x_n$



بالجمع $\longrightarrow \sum x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum x_i \qquad (2)$

من (1) & (2) نحصل على المطاليب لإيجاد المعادله.

Remark :-

$y = ax + b$ ← كيف احل اى سؤال يسهوله

① نعمل sum واللى مفيهوش x نضربه فى n ← $\sum y_i = a \sum x_i + nb$

② ثم نضرب المعادله فى x ونعملها sum ← $\sum x_i y_i = a \sum x_i^2 + b \sum x_i$

$$y = a + bx$$

① $\sum y_i = na + b\sum x_i$

② $\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2$

Example: Fit the Curve $y = a + bx$ From the table:

x_i	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y_i	0.31	0.82	1.29	1.85	2.51	3.02

solution:

$\sum y_i = na + b\sum x_i$

$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2$

	X	y	xy	X^2
	0.5	0.31		
	1	0.82		
	1.5	1.29		
	2	1.85		
	2.5	2.51		
	3	3.02		
sum	10.5	9.8	21.995	22.75

بوضع المعادلات بأرقامها :

$9.8 = 6a + 10.5b$

$21.945 = 10.5a + 22.75b$

بحل المعادلتين معاً :

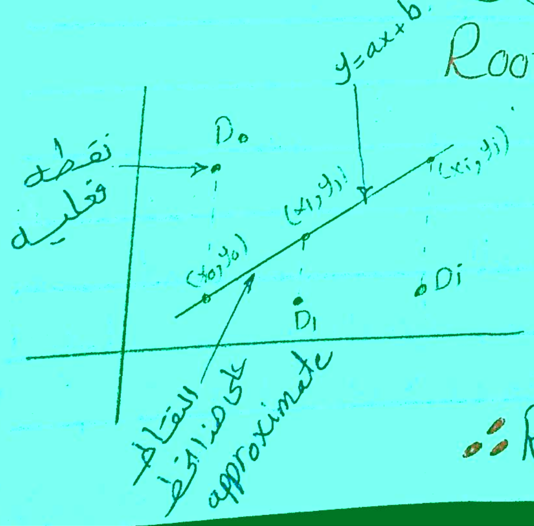
$a = -0.285 \quad b = 1.096$

يتم حل هذا الجدول بإستخدام الآلة الحاسبة :-

① mode
② state (3)
③ A+BX (2)
④ ثم ندخل الارقام في x & y
⑤ نضغط AC
⑥ shift +(1)
⑦ sum (3)
⑧ نختار Σx
⑨ AC
⑩ shift +(1)
⑪ Σ xy
⑫ AC
⑬ shift +(1)
⑭ $\sum X^2$

$$y = -0.285 + (1.096)X$$

Root mean square error
- RMSE -



$$D_0 = |y_0 - y_{app}(x_0)|^2$$

$$\vdots$$

$$D_i = |y_i - y_{app}(x_i)|^2$$

$$\therefore RMSE = \sqrt{\frac{\sum D_i^2}{n}}$$

Example: From the following data Find RMSE.

x_i	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y_i	0.31	0.82	1.29	1.85	2.51	3.02

solution:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum D_i^2}{n}}$$

x_i	y_i	$y_{app} = 0.285 + (1.096)x$	$D_i^2 = \lvert y_i - y_{app} \rvert^2$
0.5			
1			
⋮			
Sum			0.013605

$$\therefore RMSE = \sqrt{\frac{0.013605}{6}} = 0.47618$$

افكار مختلفه للمسائل :

يمكن ان يعطى فى رأس المسأله اشكال دوال تحتوى على ثابتين وليست على صورة

الخط المستقيم $y = ax + b$ ومعطا جدول فيه x و y معطى

يكون التفكير على النحو التالى / ان نجرى عمليات رياضيه

وطرفين أو أخذ لوغاريتم للطرفين أوقلب كل طرف بحيث

إلى احدى صور الخط المستقيم برموز جديده ناتجه ع

التى أُجريت على x & y .

مثل ضرب وسطين

انها تتحول

من العمليات

* الصورة الاولى

$$y = a e^{bx}$$

بأخذ ln للطرفين

$$\ln y = \ln a + \ln e^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + bx \quad (1) \qquad : \ln_e e = 1$$

$$\ln y = Y \quad , \quad \ln a = A$$

$$\therefore Y = A + bx$$

$$\sum Y_i = nA + b \sum x_i$$

$$\sum Y_i x_i = A \sum x_i + b \sum x_i^2$$

x_i	y_i	$Y = \ln y$	xY	x_i^2

$$\ln uv = \ln u + \ln v$$

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$$

$$\ln u^n = n \ln u$$

$$\ln u = V$$

$$u = e^V$$

** الصورة الثانية

$$y = a b^{x}$$

بأخذ ln للطرفين

$$\ln y = \ln a + x \ln b$$

$Y = \ln y$ $\qquad A = \ln a$ $\qquad B = \ln b$

$$\therefore Y = A + Bx$$

x	y	Y=ln y	xY	x^2

$$\sum Y_i = nA + B \sum x_i$$

$$\sum x_i Y_i = A \sum x_i + B \sum x_i^2$$

وبعد حل المعادلتين $\longrightarrow$ $b = e^{B}$ $\qquad a = e^{A}$

*** الصورة الثالثة

$$y = \frac{\quad}{a+bx}$$

بقلب الطرفين

$$\frac{1}{y} = \frac{a+b}{x}$$

$$\frac{1}{y} = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$$

$Y = \frac{1}{y}$ $\qquad X = \frac{1}{x}$

$$\therefore Y = aX + b$$

$$\sum Y_i = a \sum X_i + nb$$

$$\sum Y_i X_i = a \sum X_i^2 + b \sum X_i$$

x	y	$1/x = X$	$1/y = Y$	XY	X_i^2

حل آخر :

$$\frac{\text{بسط}}{\text{بسط}} = \frac{\text{مقام}}{\text{مقام}}$$

$$\frac{x}{y} = a + bx$$

$Y = \frac{x}{y}$ $\qquad \therefore Y = a + bx$

x	y	Y = y/x	xY	x_i^2

$$\sum Y_i = na + b \sum x_i$$

$$Y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2$$

General Form of Curve Fitting

الصورة العامة لتوفيق المنحنيات

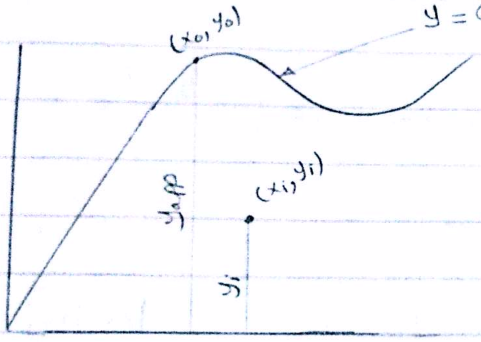
$$y = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_n \phi_n(x)$$

الحل عبارة عن Matrix Form وتكون عبارة عن

$$\begin{bmatrix} \Sigma\phi_0^2 & \Sigma\phi_0\phi_1 & \cdots & \Sigma\phi_0\phi_n \\ \Sigma\phi_0\phi_1 & \Sigma\phi_1^2 & \cdots & \Sigma\phi_1\phi_n \\ \vdots & & & \\ \Sigma\phi_0\phi_n & \Sigma\phi_1\phi_n & \cdots & \Sigma\phi_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y\phi_0 \\ \Sigma y\phi_0 \\ \vdots \\ \Sigma y\phi_n \end{bmatrix}$$

Example: Deduce the matrix form of general case of Curve fitting $y = \sum_{i=0}^{n} a_i\phi_i(x)$

$y = a_0\phi_0(x) + \cdots a_n\phi_n(x)$



مقدار الخطأ في حساب الدالة عند كل نقطة هو

$D_i = (y_i - y_{app}(x_i))$

تكون دالة الخطأ $f(x) = \Sigma D_i^2$

$f(x) = \Sigma(y_i - a_0\phi_0 - a_1\phi_1 - \cdots a_n\phi_n)^2$

نوجد أفضل قيم لـ a_i تجعل الخطأ أقل ما يمكن نضع:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = \Sigma 2(y_i - a_0\phi_0 - \cdots a_n\phi_n)(-\phi_0) = 0$$

$$\Sigma y_i\phi_0 = a_0\Sigma\phi_0^2(x_i) + a_1\Sigma\phi_0\phi_1 + \cdots + a_n\Sigma\phi_0\phi_n \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \Sigma 2(y_i - a_0\phi_0 - a_1\phi_1 - \cdots - a_n\phi_n)(-\phi_1) = 0$$

$$\Sigma y_i\phi_i = a_0\Sigma\phi_0\phi_1 + a_1\Sigma\phi_1^2 + \cdots + a_n\Sigma\phi_1\phi_n \quad (2)$$

$\vdots$

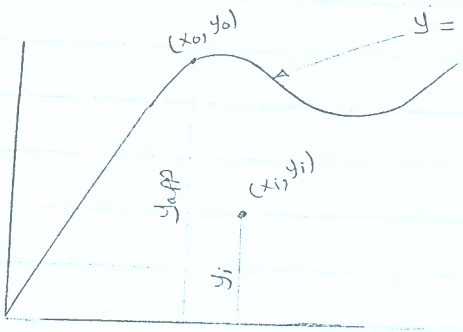
$$\frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

$$\Sigma y_i\phi_n = a_0\Sigma\phi_0\phi_n + a_1\Sigma\phi_1\phi_n + \cdots + a_n\Sigma\phi_n^2 \quad (n)$$

الحل عبارة عن Matrix Form وتكون عباره عن

$$\begin{bmatrix} \Sigma\phi_0^2 & \Sigma\phi_0\phi_1 & \cdots & \Sigma\phi_0\phi_n \\ \Sigma\phi_0\phi_1 & \Sigma\phi_1^2 & \cdots & \Sigma\phi_1\phi_n \\ \vdots \\ \Sigma\phi_0\phi_n & \Sigma\phi_1\phi_n & \cdots & \Sigma\phi_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y\phi_0 \\ \Sigma y\phi_0 \\ \vdots \\ \Sigma y\phi_n \end{bmatrix}$$

Example: Deduce the matrix form of general case of Curve fitting $y = \sum_{i=0}^{n} a_i\phi_i(x)$



مقدار الخطأ فى حساب الداله عند كل نقطه هو

$$D_i = \left(y_i - y_{app}(x_i)\right)$$

تكون داله الخطأ

$$f(x) = \Sigma D_i^2$$

$$f(x) = \Sigma\left(y_i - a_0\phi_0 - a_1\phi_1 - \cdots a_n\phi_n\right)^2$$

لكى نوجد افضل قيم لـ a_i تجعل الخطأ اقل ما يمكن ، نضع :

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = \Sigma 2\left(y_i - a_0\phi_0 - \cdots a_n\phi_n\right)(-\phi_0) = 0$$

$$\Sigma y_i\phi_0 = a_0\Sigma\phi_0^2(x) + a_1\Sigma\phi_0\phi_1 + \cdots + a_n\Sigma\phi_0\phi_n \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \Sigma 2\left(y_i - a_0\phi_0 - a_1\phi_1 - \cdots - a_n\phi_n\right)(-\phi_1) = 0$$

$$\Sigma y_i\phi_i = a_0\Sigma\phi_0\phi_1 + a_1\Sigma\phi_1^2 + \cdots + a_n\Sigma\phi_1\phi_n \quad (2)$$

$\vdots$

$$\frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

$$\Sigma y_i\phi_n = a_0\Sigma\phi_0\phi_n + a_1\Sigma\phi_1\phi_n + \cdots + a_n\Sigma\phi_n^2 \quad (n)$$

المعادلات 1 & 2 & n هى معادلات فى مجاهيل وهى a_0 ، a_1 ، a_n

$$\begin{bmatrix} \sum \phi_0 y_i \\ \sum \phi_1 y_i \\ \vdots \\ \sum \phi_n y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \phi_0^2 & \sum \phi_0 \phi_1 & \cdots & \sum \phi_0 \phi_n \\ \sum \phi_0 \phi_1 & \sum \phi_1^2 & \cdots & \sum \phi_1 \phi_n \\ \vdots & & & \\ \sum \phi_0 \phi_n & \sum \phi_0 \phi_1 & \cdots & \sum \phi_0 \phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Example: Fit the curve $y = a_0 + a_1(2x) + a_2(4x^2 - 2)$ of the following

x_i	0	1	2	3
y_i	3.8	6.2	31.2	62.2

solution: $y = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_0(x) + a_2 \phi_2(x)$

$\phi_0(x) = 1 \qquad \phi_1(x) = 2x \qquad \phi_2(x) = 4x^2 - 2$

$$\begin{bmatrix} \sum \phi_0^2 & \sum \phi_0 \phi_1 & \sum \phi_0 \phi_2 \\ \sum \phi_0 \phi_1 & \sum \phi_1^2 & \sum \phi_1 \phi_2 \\ \sum \phi_0 \phi_2 & \sum \phi_1 \phi_2 & \sum \phi_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \phi_0 y_i \\ \sum \phi_1 y_i \\ \sum \phi_2 y_i \end{bmatrix}$$

← نحدد الـ $\sum$ فى بدايتها ونهايتها على حسب عدد الخانات فى الجدول وعندنا هنا $\sum_{i=0}^{3}$

نبسط المصفوفة بإيجاد قيم $\sum$

$$\begin{bmatrix} 4 & \sum \phi_1 & \sum \phi_2 \\ \sum \phi_1 & \sum \phi_1^2 & \sum \phi_1 \phi_2 \\ \sum \phi_2 & \sum \phi_1 \phi_2 & \sum \phi_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum \phi_1 y_i \\ \sum \phi_2 y_i \end{bmatrix}$$

← نلاحظ ان:

مصفوفة المعاملات متماثلة. اى ان الارقام فوق القطر الرئيسى زى الارقام تحته.

نكون جدول من الصور اللى فوق القطر بالقطر :-

كما يلى ----

x	y	$\phi_1 = 2x$	$\phi_2 = 4x^2 - 2$	$\phi_1\phi_2$	ϕ_1^2	ϕ_2^2	$y\phi_1$	$y\phi_2$
0	3.8	0	−2	0	0	4	0	(3.8) −2
1	6.2	2	2	4	4	4	2(6.2)	(6.2) 2
2	31.2	4	14	4(14)	16	196	(31.2)4	(31.2)14
3	62.2	6	34	6(34)	36	$(34)^2$	(62.2)6	(62.2) 14
sum								

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 & 48 \\ 2 & 360 & 56 \\ 48 & 56 & 264 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 632.8 \\ 3244.8 \end{bmatrix}$$

بالآلة الحاسبة → mode

Eqn

$a_n x + b_n y + C_n Z = d_n$

at $n = 1$ $4x + 12y + 48Z = 24$

at $x = 0$ $a_0 = 9.88$ $y = 0 \rightarrow a_1 =$ $Z = 0 \rightarrow a_2 =$

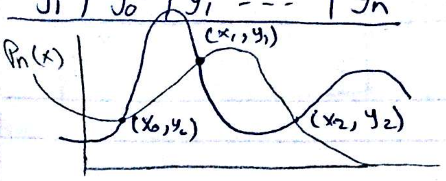
② 8 رياضة

Interpration

عندما يكون معلوم قيم الدالة عند نقط

x_i	x_0	x_1 - - -	x_n
y_i	y_0	y_1 - - -	y_n

- يمكن تعيين كثير حدود $P_n(x)$ تشترك مع الدالة عند النقط وتختلف عن الدالة بين هذه النقط



① Interpration by unequal internal

- في هذا الجزء يكون الجدول المعطى قيم x غير متساوية الفروق

ⓐ Lagrange polynomial

ⓑ Newton divided method

1 Lagrange polynomial

اذا كان مطلوب حساب $P_n(x)$ من الجدول

x_i	x_0	x_1	x_2	- - -	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	- - -	y_n

solution :-

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1$$

$$+ \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

← ينحني اول خانة ونبدأ نحط الاصفر لـ في البسط ($x-$)

Example: Find $P_3(x)$ From the data

x	1	2	4	5
y	2	3	4	2

Solution: $P_3(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)}(2) + \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)}(3)$

$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)}(4) + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)}(2)$$

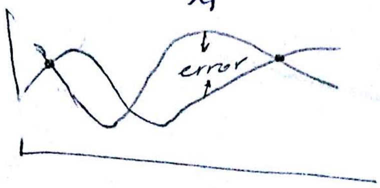
← نلاحظ ان درجة كثير الحدود اقل من عدد خانات الجدول بـ 1 . اذا طلب في المسألة كثير حدود درجتها اقل من عدد خانات الجدول (بواحد) ...

Error estimation of Lagrange

$$\text{Error} \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n) \right|$$

$$M_{n+1} = \max_{x_i} \left| f^{(n+1)}(x_i) \right|$$

ـ الخطأ الناتج في حساب كثير حدود lagrange هو الفرق بين القيمة الفعلية والقيمة التقريبية للدالة



:. الخطأ هو الفرق بين $P_n(x)$ & $f(x)$

$$E = \left| f(x) - P_n(x) \right|$$

← لحساب الخطأ عند نقطة تقع بين قيم الجدول نعد عدد خانات الجدول فيكون هو قيمة $(n+1)$

← لحساب M تفاضل الدالة بعدد خانات الجدول ونعوض بنقاط الجدول في ناتج التفاضل ونأخذ اكبرهم

Example / use the data $\cosh(0.1) = 1.005$, $\cosh(0.2) = 1.020$ and $\cosh(0.4) = 1.081$ to find approximate value of $\cosh(0.3)$ by Lagrange and find the error

Solution: نكون الجدول

$x_0 = .1$	$x_1 = 0.2$	$x_2 = 0.4$
$y_0 = 1.005$	$y_1 = 1.02$	$y_2 = 1.081$

$$\therefore P_2(x) = \frac{(x-0.2)(x-0.4)}{(.1-0.2)(.1-0.4)}(1.005) + \frac{(x-0.1)(x-0.4)}{(.2-.1)(.2-.4)}(1.02) + \frac{(x-0.1)(x-0.2)}{(.4-.1)(.4-.2)}(1.081)$$

نشيل x ونحط $\boxed{0.3}$

$$\to \cosh(0.3) \simeq \frac{(.3-0.2)(.3-0.4)}{(.1-0.2)(0.1-0.4)}(1.005) + \frac{(0.2)(0.1)}{(0.1)(-0.2)}(1.02)$$

$$+ \frac{\quad}{(0.3)(0.2)}$$

(1.081)

$$E \leqslant \frac{M_3}{3!} \left| (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right|$$

$M_3 \to f(x) = \cosh x \to \bar{f}(x) = \sinh(x) \to \bar{\bar{f}}(x) = \cosh(x) \to \bar{\bar{\bar{f}}}(x) = \sinh(x)$

ــــ نعوض قيم الجدول جوا الداله دي واشوف انهي هتدي اكبر نتيجه

$$\therefore M_3 = 0.4107$$

$$E \leqslant \frac{0.4107}{3!} \left| (0.3-0.1)(0.3-0.2)(0.3-0.4) \right| \therefore E \leqslant 1.36 \times 10^{-5}$$

Deduce the form of error by lagrange

$$\text{Error} \leqslant \frac{\max |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$$

10

— مفهوم الخطأ هو الفرق بين القيمه الفعليه والتقريبيه للداله

Solution:

$$U(x) = f(x) - P_n(x) - K\,\pi_{n+1}(x) \longrightarrow (1)$$

$$\pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

* $U(x)$ داله قيمتها = صفر عند x_0 & x_1 & x_2 ... x_n . يمكن زياده عدد جذور الداله لتكون $(n+2)$ roots

$$U(x^*) = f(x^*) - P_n(x^*) - K\,\pi_{n+1}(x^*) = $$

$$K = \frac{f(x^*) - P_n(x^*)}{\pi_{n+1}(x^*)}$$

اى انه يمكن زياده عدد الجذور بجذر أخر

إذا كانت قيم الجذور قريبه جدا من بعضها فإن ←

$$U^{(n+1)}(\xi) = 0$$

من المعادله (1)

$$P_n^{(n+1)}(x) = 0$$

$$\pi_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$$

$$U^{n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi) - 0 - K(n+1)! = 0$$

$$K = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

* القيمه X^* غير معطاه فى الجدول ولكنها جذر للمعادله $U(x^*) = 0$

$$\longrightarrow |f(x^*) - P_n(x^*)| = |K|\,|\pi_{n+1}(x^*)|$$

$$\text{Error} = \frac{\max |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

Root of equation by lagrange.

ايجاد جذور المعادله : $f(x) = 0$ ← معناه الداله تقطع محور x عند هذه النقط

خطوات الحل :

(1) نضع $f(x) = y$

(2) نعوض بأرقام حتى تتغير الاشاره من $\ominus$ الى $\oplus$ والعكس

(3) نأخذ نقطه المنتصف للفتره ونعوض بها فى الداله . إذا كانت من اول الفتره يكون الجذر فى اخر الفتره والعكس

(4) من اصغر فتره نكون جدول ومنه نجيب $P_n(y)$ ← كأنى هحط y مكان X واشتغل عادى نضع $y = 0$ ← فنحصل على الجذر X

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3

Example: Use lagrange to find root of

$$e^{x}+x-2=0$$

Solution: $f(x)=e^{x}+x-2$

$F(0)=-ve$ & $f(1)=+ve$

mode
taple
shift + ln
ALP + X
ادخل الدالة
ثم يساوي
هنيا لي البداية
والنهاية وال step

الدالة بتقليبها

0 ⊖ ——— 0.5 ——— 1 ⊕

$f(0.5)=0.00108$

النتيجة طلعت سالب وانا عارف ان الدالة عند صفر ⊖ وعند 0.5 ⊕

∴ القيمة بين $0 \to 0.5$

اكون جدول لعدد 4 ارقام بين 0 و 0.5

x	$x_1=0.2$	0.3	0.5
y	0.578	$-.35$	0.148

$$X=P_n(y)=\frac{(y+0.578)(y+0.35)(y-0.148)}{(-1+.578)(-1+.35)(-1-.148)}+$$

$$\frac{(y+1)(y+.35)(y-.148)}{(-.578+1)(-.578+.35)(-.578-.148)}+$$

$$\frac{(y+1)(y+.578)(y+.148)}{(-0.35+1)(-0.35+.578)(-.35+.148)}(0.3)+$$

$$\frac{(y+1)(y+.378)(y+.35)}{(.148+1)(.148+.378)(.148+.35)}(.5)$$

Putting $y=0$ ∴ X is the root

(2) Newton divided method

$$P_n(x) = y_0 + f(x_0 - x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

Example: find $P_n(x)$ Newton divided method

x	1	2	4	6
y	2	8	10	12

x	y	δ	δ^2	δ^3
1	2			
		$\frac{8-2}{2-1} = 6$		
2	8		$\frac{1-6}{4-1} = \frac{-5}{3}$	
		$\frac{10-8}{4-2} = 1$		$\frac{0-(-\frac{5}{3})}{6-1} = \frac{1}{3}$
4	10		$\frac{1-1}{6-2} = 0$	
		$\frac{12-10}{6-4} = 1$		
6	12			

$$P_n(x) = 2 + 6(x-1) + \left(\frac{-5}{3}\right)(x-1)(x-2) + \left(\frac{1}{3}\right)(x-1)(x-2)(x-4).$$

3

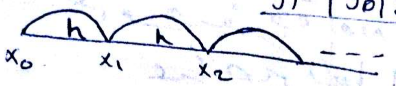
[2] interpolations with equal interval

التقريب بفترات متساويه

← في هذا الجزء سوف ندرس قواعد ومؤشرات جداول فروق X المتساويه وتكون على الصوره

i.e

x_i	x_0	x_1	--	x_r	--	x_n
y_i	y_0	y_1	--	y_r	--	y_n



$$\longrightarrow x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

$$\vdots$$

$$x_r = x_0 + rh$$

$$\boxed{\text{Some important operator}}$$

بعض المؤشرات الهامه التي سندرسها يمكن استنتاج قيم لـ من القيم المجاوره ويمكن المعرفه على الخانه الثانيه في الجدول.

[1] shift operator (E)

مؤثر الازاحه

$$\longrightarrow E f(x) = f(x+h)$$

$$E y_1 = y_2$$

$$E^2 y_1 = E(E y_1) = E y_2 = y_3$$

$$\longrightarrow E^n f(x) = f(x+nh)$$

[2] forward operator (Δ)

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta y_5 = y_6 - y_5$$

[3] Backward operator (∇)

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$\nabla y_3 = y_3 - y_2$$

[4] Center operator (δ)

$$\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

[5] Mean operator (μ)

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]$$

EX: show that

① $\Delta = E - 1$ ② $\nabla = 1 - E^{-1}$

③ $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$

① $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$E f(x) = f(x+h)$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$= E f(x) - f(x)$$

$$\Delta f(x) = (E-1) f(x)$$

$$\boxed{\Delta = E - 1}$$

② $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

$$= f(x) - E^{-1} f(x)$$

$$\nabla f(x) = (1 - E^{-1}) f(x)$$

$$\boxed{\nabla = 1 - E^{-1}}$$

③ $\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$

$$\delta f(x) = E^{\frac{1}{2}} f(x) - E^{-\frac{1}{2}} f(x)$$

$$\boxed{\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}}$$

Ex: show that

① $\Delta(f_r \, g_r) = f_r \Delta g_r + g_{r+1} \Delta f_r$

② $\Delta\left(\frac{f_r}{g_r}\right) = \dfrac{g_r \Delta f_r - f_r \Delta g_r}{g_{r+1}\, g_r}$

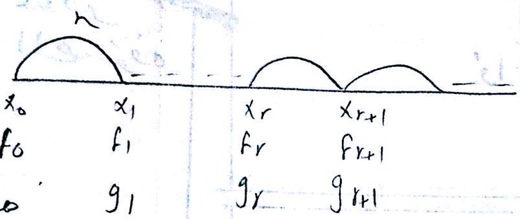
and use it to find:

$\Delta\left(\dfrac{f_2}{g_2}\right)$ & $\Delta(f_2 g_2)$ from

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_r	1	2	3	4
f_r	1 f_0	3 f_1	5 f_2	7 f_3

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_r	1	2	3	4
g_r	5	7	9	11
	g_0	g_1	g_2	g_3

Sol :



① $\Delta(f_r g_r) = f_{r+1} g_{r+1} - f_r g_r$

$= f_{r+1} g_{r+1} - f_r g_{r+1} + f_r g_{r+1} - f_r g_r$

$= (f_{r+1} - f_r)\, g_{r+1} - f_r(g_{r+1} - g_r)$

$= g_{r+1} \Delta f_r + f_r \Delta g_r$

② $\Delta\left(\dfrac{f_r}{g_r}\right) = \dfrac{f_{r+1}}{g_{r+1}} - \dfrac{f_r}{g_r}$

$= \dfrac{f_{r+1} g_r - f_r g_{r+1}}{g_{r+1}\, g_r}$

$= \boxed{\dfrac{f_{r+1} g_r - f_r g_r + f_r g_r - f_r g_{r+1}}{g_r\, g_{r+1}}}$

$= \dfrac{g_r(f_{r+1} - f_r) - f_r(g_{r+1} - g_r)}{g_{r+1}\, g_r}$

$= \dfrac{g_r \Delta f_r - f_r \Delta g_r}{g_r\, g_{r+1}}$

$\Delta f_2 g_2 = (5)(11-9) + (11)(2)$

$= 32$

$\Delta\left(\dfrac{f_2}{g_2}\right) = \dfrac{9 * (7-5) - (5)(11-9)}{9 * 11}$

Evaluate missing data by operator

كيفية إيجاد قيمة مفقودة في جدول باستخدام operator

x_0	x_1	x_2	?	--	x_n
y_0	y_1	y_2	?	--	y_n

لكي نوجد قيمة مفقودة في الجدول نتبع الخطوات التالية :-

① نضع هذه القيمة بـ α

② نضع $\Delta^n y_0 = 0$

③ نحول Δ إلى E باستخدام الخواص:
$(E-1)^n y_0 = 0$

④ نفك بيسكال ونعوض من الجدول فينتج معادلة في α

$(a+b)^0$ 1

$(a+b)^1$ 1 1

$(a+b)^2$ 1 2 1

$(a+b)^3$ 1 3 3 1

$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1

$\rightarrow (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\rightarrow (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Ex: Find the missing data from

x_i	1	2	3	4 x_3
y_i	2	6	—	10

Sol: $\Delta^3 y_0 = 0$ $\boxed{\Delta = E - 1}$

$(E-1)^3 y_0 = 0$

$(E^3 - 3E^2 + 3E - 1)\, y_0 = 0$

$(0 - 3*\alpha + 3*6 - 2) = 0$

$3\alpha = 26 \quad \therefore \alpha = \dfrac{26}{3}$

show that

① $\delta = \nabla(1-\nabla)^{-\frac{1}{2}}$

② $\Delta = \frac{\delta^2}{2} + \delta\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}$

③ $\Delta + \nabla = \frac{\Delta}{\nabla} - \frac{\nabla}{\Delta}$.

④ $\sum_{k=0}^{n} \Delta^2 f_k = \Delta f_{n+1} - \Delta f_0$

⑤ $\Delta^n f_j = \nabla^n f_{i+n} = \delta^n f_{i+\frac{n}{2}}$

- اسلوب التفكير في هذه النوعية من المسائل نحاول ان نوحد الطرف الايمن بدلالة E والطرف الايسر بدلالة E ونوضح ان كلاهما متساوي . من خلال :-

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Delta = E-1 & \nabla = 1-E^{-\frac{1}{2}} \\ \delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} & \mu = \frac{E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}}{2} \end{array}}$$

$\boxed{1}$ $\delta = \frac{\nabla}{\sqrt{1-\nabla}}$

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{E} - \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$= \frac{E-1}{\sqrt{E}} = (E-1)E^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\therefore \delta = \Delta E^{-\frac{1}{2}}} \longrightarrow ①$$

$$R.H.S \rightarrow \frac{\nabla}{\sqrt{1-\nabla}} = \frac{1-\frac{1}{E}}{\sqrt{1-1+\frac{1}{E}}}$$

$$= \frac{E-1}{\sqrt{E}} = \boxed{\Delta E^{-\frac{1}{2}}} \longrightarrow ②$$

From 1 & 2

$\boxed{2}$ $\Delta = E-1$ & $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \times E^{\frac{1}{2}}$

$$(E^{\frac{1}{2}})^2 - \delta E^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

للمعادلة التربيعية نحل بالقانون

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$E^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2+4}}{2}$$

بالتربيع للطرفين

$$E = \frac{1}{4}\left[\delta^2 \pm 2\delta\sqrt{\delta^2+4} + \delta^2 + 4\right]$$

$$E = \frac{\delta^2}{2} \pm \frac{\delta\sqrt{\delta^2+4}}{2} + 1$$

$$E - 1 = \frac{\delta^2 \pm \delta\sqrt{\delta^2+4}}{2}$$

$$\Delta = \frac{\delta^2 + \delta\sqrt{\delta^2+4}}{2}$$

$\boxed{4}$ $\Delta = E-1 \longrightarrow \Delta^2 = (E-1)^2$

$$\Delta^2 = (E^2 - 2E + 1)$$

$$\Delta^2 f_r = [E^2 - 2E + 1] f_r$$

$$= f_{r+2} - 2f_{r+1} + f_r$$

$$\sum_{k=0}^{n}(f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k) = \sum \Delta^2 f_k$$

$$\sum \Delta^2 f_k = \underbrace{(\cancel{f_2} - 2f_1 + f_0)}_{k=0} + \underbrace{(\cancel{f_3} - \cancel{2f_2} + f_1)}_{k=1} + (f_4 - \cancel{2f_3} + \cancel{f_2}) + \cdots (f_{n+1} - 2f_n + f_{n+1}) + (f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n)$$

← هنلاقي كل حد طول ما هو ماشي هيطير مع واحد من التوس قبله وواحد من التوس بعده وهيتبقى عند الحد الاول والاخير فهم حاجات مش هتطير

$$= f_1 + f_0 + f_{n+2} - f_{n+1}$$

$$= -(f_1 - f_0) + \Delta f_{n+1}$$

$$= -\Delta f_0 + \Delta f_{n+1}$$

$\boxed{5}$ $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{E} - \frac{1}{\sqrt{E}}$

$$\delta = \frac{E-1}{\sqrt{E}} = \Delta E^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta^n f_{i+\frac{n}{2}} = (\Delta E^{-\frac{1}{2}})^n f_{i+\frac{n}{2}}$$

$$= \Delta^n E^{-\frac{n}{2}} f_{i+\frac{n}{2}}$$

$$= \Delta^n f_{i+\frac{n}{2}-\frac{n}{2}}$$

$$= \Delta^n f_i \ \#$$

$$\nabla^n f_{i+n} = \Delta^n f_i$$

$$\nabla = 1 - E^{-1} = 1 - \frac{1}{E} = \frac{E-1}{E}$$

$$\boxed{\nabla = \Delta E^{-1}}$$

$$\nabla^n f_{i+n} = (\Delta E^{-1})^n f_{i+n}$$

$$= (\Delta^n E^{-n}) f_{i+n}$$

$$= \Delta^n f_{i+n-n}$$

$$= \Delta f_i \ \#$$

4

Derivatives by operator form

في هذا الجزء نحاول ربط خواص المؤثرات العدديه بالمشتقه

$$D^r = \frac{d^r}{dx^r}$$

[1] show that :

$$E = e^{hD} \quad ; \quad D = \frac{d}{dx}$$

$E f(x) = f(x+h)$, مد تايلور

$$= f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots$$

$$f'(x) = D f(x) \quad ; \quad f''(x) = D^2 f(x)$$

$$E f(x) = \left[1 + \frac{h}{1!} D + \frac{h^2}{2!} D^2 + \cdots\right] f(x)$$

$$\xrightarrow[\text{ماكلورين}]{\text{عكس}} \quad E f(x) = e^{hD} f(x)$$

$$\boxed{E = e^{hD}} \quad \#$$

[2] show that :

$$D = \frac{2}{h} \sinh^{-1}(\delta/2)$$

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad E = e^{hD}$$

$$\therefore \delta = \left[e^{hD}\right]^{\frac{1}{2}} - \left[e^{hD}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

دول علشان لو احسب الداله المثلثيه

$$= 2 * \frac{e^{\frac{hD}{2}} - e^{-\frac{hD}{2}}}{2}$$

$$\delta = 2 \sinh \frac{hD}{2}$$

$$\frac{hD}{2} = \sinh^{-1} \frac{\delta}{2}$$

$$\boxed{D = \frac{2}{h} \sinh^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad \#$$

[3] show that :

$$D = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \cdots\right]$$

$$D = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \cdots\right]$$

and use it to find $f'(0.1)$ From Δ-operator and ∇-operator From

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	2	8	6	10

$$hD = \ln E$$

$$D = \frac{1}{h}\left[\ln 1 + \Delta\right]$$

Flash back

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (*) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \end{aligned}}$$

بالتكامل

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

باخذ المسالة ناتجة

$$D = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{1}{3}\Delta^3 + \cdots\right] \quad \#$$

$$hD = \ln E$$

$$\nabla = 1 - E^{-1} \quad , \quad E^{-1} = 1 - \nabla$$

$$E = (1-\nabla)^{-1}$$

$$hD = -\ln(1-\nabla)$$

From (*)

$$-\int \frac{-dx}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right]$$

$$D = \frac{-1}{h} \ln(1-\nabla)$$

$$D = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \cdots\right]$$

بعد حساب الفروق من جداول Δ & ∇ نعوض فى القانون :-

لكى نوجد $\bar{f}(0.1)$ نكون جدول الفروق :

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3
0.1	2 y_0			

$P_n(x) = y_0 + P\Delta y_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$

Newton's backward form — NB

قانون نيوتن الخلفى

* اذا كان المطلوب حساب قيمه للداله تقع بين أخر خانتين فى الجدول نضع :-

$$P = \frac{x - x_n}{h}$$

حيث ←

x ← القيمه المطلوب حساب الداله عندها

x_n ← اخر خانه ع الجدول لـ X

h ← خطوة التقسيم

$$P_n(x) = y_n + P\nabla y_n + \frac{P(P+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \cdots$$

Ex : From the following data

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	2	6	10	8

Find $f(0.11)$ and $f(0.35)$

جدول الفروق

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3
0.1	2			
0.2	8	6	-8	$\Delta^3 y_0$
0.3	6	-2		14
0.4	16 y_n	4 ∇y_n	6 $\nabla^2 y_n$	$\nabla^3 y_n$

→ $\bar{f}(0.1)$ by Δ-operator

$Df(x) = \frac{1}{h}[\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 + \cdots]f(x)$

$\bar{f}(0.1) = \frac{1}{.1}[6 - \frac{1}{2}(-8) + \frac{1}{3}(14)]$

→ $\bar{F}$ by ∇-operator

$\bar{F}(0.1) = \frac{1}{0.1}[4 + \frac{1}{2}(6) + \frac{1}{3}(14)]$

- قيمه المشتقه الاولى تكون دقيقه اى الخطأ فى حسابها صغير جداً إذا استخدمنا القانون ① ع حاله النقطه المطلوبه قريبه من أول الجدول
- والقانون ② يكون الخطأ ع حساب المشتقه الاولى صغير جداً اذا كانت النقطه قريبه من نهايه الجدول

Newton's forward form — NF

قانون نيوتن الامامى

* اذا كان المطلوب حساب قيمه للداله تقع بين الخانه الاولى والثانيه

$$P = \frac{x - x_0}{h}$$

حيث ←

X ← النقطه المطلوب حساب الداله عندها

X_0 ← اول قيمه ع الجدول لـ X

h ← خطوة التقسيم

0.3	10	4	
0.4	8	-2	

$F(0.11) \longrightarrow NF$

$$P = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.11 - 0.1}{0.1} = 0.1$$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

$$f(0.11) \simeq 2 + (0.1)(4) + \frac{(.1)(.1-1)}{2!}(0) + \frac{(.1)(.1-1)(.1-2)}{3!}(-6) = \checkmark\checkmark$$

$F(0.35) \longrightarrow NB$

$$P = \frac{x - x_n}{h} = \frac{.35 - .4}{.1} = -.5$$

$$P_n(x) = 8 + (-.5)(-2) + \frac{(-.5)(-.5+1)}{2!}(-6) + \frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+2)}{3!}(-6)$$

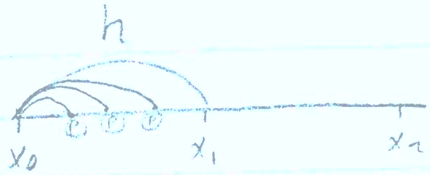
Remark:

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

Ex: show that

$$f(x) \simeq f_0 + P\Delta f_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots$$

if $x = x_0 + ph \quad 0 < p < 1$



يعني كده انا بين اول نقطتين

$$F(x) = f(x_0 + Ph) = E^P f_0$$

$\because \Delta = E - 1 \quad , \therefore E = \Delta + 1$

$$f(x) \simeq (1+\Delta)^P f_0$$

نفك مفكوك ذات الحدين

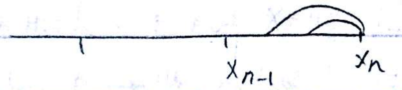
$$f(x) \simeq \left[1 + P\Delta + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 + \dots\right] f_0$$

$$\simeq f_0 + P\Delta f_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots$$

Ex: show that

$$f(x) = f_n + P\nabla f_n + \frac{P(P+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \dots$$

$, x = x_n + Ph \quad -1 < P < 0$



$$f(x) = f(x_n + Ph) = E^{+P} f_n$$

$\nabla = 1 - E^{-1} \quad \therefore E^{-1} = 1 - \nabla$

$$E = (1-\nabla)^{-1}$$

$$f(x) = \left[(1-\nabla)^{-1}\right]^{+P} f_n$$

$$= (1-\nabla)^{-P} f_n$$

نفك ذات الحدين

$$\simeq \left[1 - (-P)\nabla + \frac{(-P)(-P-1)}{2!}\nabla^2 - \frac{(-P)(-P-1)(-P-2)}{3!}\nabla^3 + \dots\right] f_n$$

$$\simeq f_n + P\nabla f_n + \frac{P(P+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{P(P+1)(P+2)}{4!}\nabla^3 f_n + \dots$$

⑤ Gauss Forward Form (G.F)

- عندما تكون النقطه المطلوب حسابها الداله عندها تقع فى منتصف الجدول

$$P_n(x) = y_0 + P\Delta y_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(P+1)P(P-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \dots$$

X : القيمه المطلوب حساب الداله عندها

x_0 : أول قيمه فى الجدول تسبق X

h : خطوه التقسيم

$$P = \frac{x - x_0}{h}$$

طريقه كتابة القانون :

0 0 -1 -1 , -2 -2 ....

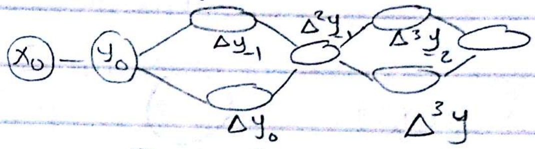
زوجى يمين ، فردى شمال

... قيم النقطه فى قيم X التى تسبق

Stirling Formula (S.F)

$$\frac{1}{2}[GF + GB]$$

$$\therefore P_n(x) = y_0 + \frac{P}{2}\left[\Delta y_0 + \Delta y_{-1}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{P(P-1)}{2!} + \frac{(P+1)P}{2!}\right]\Delta^2 y_{-1} + \frac{(P+1)P(P-1)}{2*3!}\left[\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}\right] + \dots$$



$$P = \frac{X - x_0}{h}$$

EX : Find f(3.5) from

$$p = \frac{x - x_0}{h} = \frac{3.5 - 3}{1} = 0.5$$

① GF

$$F(3.5) \simeq 10 + (.5)(-2) + \frac{(.5)(.5-1)}{2!}(-6) + \frac{(0.5+1)(0.5)(0.5-1)}{3!}12 + \frac{(.5+1)(.5)(.5-1)(.5-2)}{4!}(20)$$

② GB

$$F(3.5) \simeq 10 + (.5)(4) + \frac{(.5)(.5+1)}{2!}(-6) + \frac{(.5+1)(.5)(.5-1)}{3!}(-8) + \frac{(.5+2)(.5+1)(.5)(.5-1)}{4!}(20)$$

③ SF

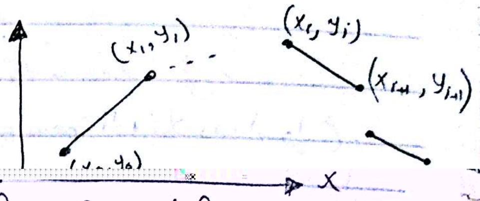
$$F(3.5) \simeq 10 + \frac{0.5}{2}[4-2] + \frac{1}{2}\left[\frac{.5(.5-1)}{2!} + \frac{(.5+1)(.5)}{2!}\right](-6) + \frac{(.5+1)(.5)(.5-1)}{2\times 3!}[-8+12] + \frac{1}{2}\left[\frac{(.5+1)(.5+1)(.5)(.5-1)}{4!} + \frac{(.5+1)(.5)(.5-1)(.5-2)}{4!}\right]20$$

spline functions

- أسلوب تقريب الدوال باستخدام spline يعتمد على ان بين كل نقطتين من نقط الجدول يمكن ان نمرر داله من الدرجه الاولى (خط مستقيم) فيسمى هذا النوع linear spline
- ويمكن تمرير منحنى من الدرجه الثانيه بين كل نقطتين ويسمى Qudratic spline
- ويمكن تمرير منحنى من الدرجه الثالثه بين نقطتين ويسمى Cubic spline

1 linear spline

- تعتمد هذه الطريقه في تعين الداله على توصيل كل نقطتين متتاليتين بخط مستقيم



$$\therefore \frac{ص - ص_.}{س - س_.} = \frac{ص_1 - ص_.}{س_1 - س_.}$$

$$\therefore \frac{y - y_1}{x - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

تستخدم بشكل عام مع كل النقاط

at $x_0 \leq x \leq x_1$

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

at $x_1 \leq x \leq x_2$

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

at $x_2 \leq x \leq x_3$

$$y_2 + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x_1 - x_2)$$

Example: Find linear spline from the data

x_i	0	1	2	3	4
y_i	5	6	9	8	10

$$S(x)=\begin{cases} 5+\frac{1}{1}(x-0) & 0\leq x\leq 1\\ 6+\frac{3}{1}(x-1) & 1\leq x\leq 2\\ 9+\frac{-1}{1}(x-2) & 2\leq x\leq 3\\ 8+\frac{1}{1}(x-3) & 3\leq x\leq 4\end{cases}$$

Digital Image

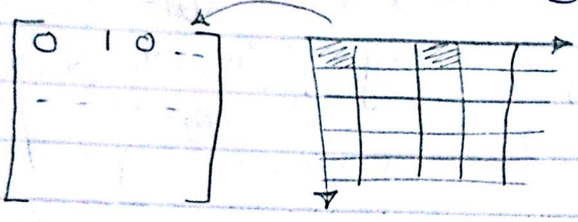
- الصور الرقمية تنقسم الى ثلاثة انواع :

① الصوره احادية اللون ويكون داخلها

- اللون الاسود. ودالة الكثافه له = صفر

- اللون الابيض ودالة الكثافه له = ١

عند التعامل مع الصوره تحول الى مصفوفه كالتالي



② الصوره تدرج الرمادى بداخلها الوان من صفر وتعمق حتى يصل إلى الاسود القاتم تتكون ارقام المصفوفه تتراوح من 0:250

③ الصوره الملونة تتكون من ٣ مصفوفات واحده للون الاحمر وواحده للاخضر وواحده للازرق واى لون نحصل عليه من مزج المصفوفات الثلاثه

Directional encodes

لحل مسالة باستخدام :

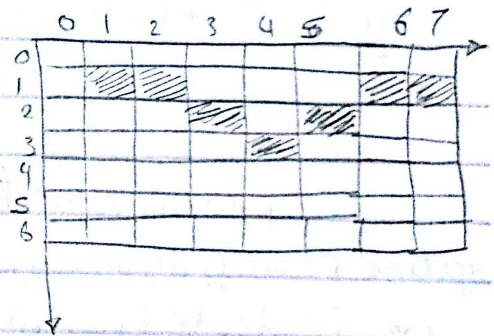
Directional encode

يعطى المسالة على هيئة ارقام بدلاله الاتجاهات الاصليه. نرسم صوره للمنحنى ناتجه من عكس هذه الارقام على وحدات تجزيئ على الصوره من معرفه الاتجاهات المعطاه ثم نحول احداثيات المنحنى الناتج الى جدول ثم نوجد spline لهذا الجدول

Example:

Use Directional encode 077110 to find approximate form of image of curve by linear spline start at (1,1)

Sol:



X	1	2	3	4	5	6	7
y	1	1	2	3	2	1	1

2 Quadratic spline

في هذه الحالة نحاول ان نعين منحنى من الدرجة الثانية بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول

$$S(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_nx^2 + b_nx + c_n & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

لمعرفة قيم الثوابت ←

$a_n \leftarrow a_1$

$b_n \leftarrow b_1$

$c_n \leftarrow c_1$

نستخدم الشروط :-

① تحقق الجدول مثل قيم $S(x)$ عند كل خانة

② $S(x)$ متصلة عند فروق الفترات $S(x_i^-) = S(x_i^+)$

③ قيم $S'(x)$ متصلة عند فروق الفترات

④ اول حد خطي $a_1 = 0$

Example: Find a spline of degree two to interpolate

x_i	0	2	4
y_i	2	5	6

and find $f(2.1)$

sol :

$$S(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 & 0 \leq x \leq 2 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\boxed{a_1 = 0}$$

$y_0 = S(x_0)$

$2 = a_1(0) + b_1(0) + c_1$

$$\boxed{c_1 = 2}$$

$y_1 = S(x_1)$

$5 = a_1(4) + b_1(2) + c_1$

$$\boxed{b_1 = \frac{3}{2}}$$

$y_2 = S(x_2)$

$$\boxed{6 = 16a_2 + 4b_2 + c_2} \rightarrow ①$$

الدالة $S(x)$ متصلة

$S(2^+) = S(2^-)$

$\underbrace{b_1}_{\frac{3}{2}}(2) + \underbrace{c_1}_{2} = 4a_2 + 2b_2 + c_2$

$$\boxed{5 = 4a_2 + 2b_2 + c_2} \rightarrow ②$$

$$S'(x) = \begin{cases} b_1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2a_2x + b_2 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$S'(2^-) = S'(2^+)$

$b_1 = 4a_2 + b_2$

$$\boxed{4a_2 + b_2 = \frac{3}{2}} \rightarrow ③$$

حل الثلاث معادلات بالآلة

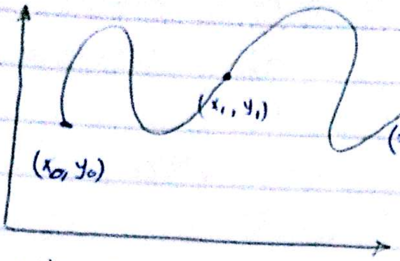
$a_2 = -\frac{1}{2}$ $\quad b_2 = \frac{7}{2}$ $\quad c_2 = 0$

$$\therefore S(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 2 & 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$f(2.1) \rightarrow -\frac{1}{2}(2.1)^2 + \frac{7}{2}(2.1)$

6 Cubic spline interpolation

التقريب بدالة من الدرجة الثالثة



المطلوب حساب دالة من الدرجة الثالثة

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول المعطى

$i = 0, 1, \dots, n-2$

$M_0 = 0 \; ; \; M_n = 0$ Natural spline

— لحل المسالة نستخدم المعادلة ** ونضع $i = 0, 1, \dots$ فينتج عدد من المعادلات في M_1 & $M_2, \dots$ تحل بالآلة الحاسبة بعد معرفة a_i, b_i, c_i, d_i

$$S(x) = \begin{cases} a_0(x-x_0)^3 + b_0(x-x_0)^2 + c_0(x-x_0) + d_0 & x_0 \le x \le x_1 \\ a_1(x-x_0)^3 + b_1(x-x_0)^2 + c_1(x-x_0) + d_1 & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x-x_n) + d_{n-1} & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

— في هذا الجزء نحاول ايجاد منحنى من الدرجة الثالثة بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول يكون المطاليب المطلوب ايجادها:

$a_0, a_1, a_2, \dots$

$b_0, b_1, b_2, \dots$

$c_0, c_1, c_2, \dots$

$d_0, d_1, d_2, \dots$

من خلال الشروط التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة وملساء (smooth) ← المشتقة الأولى معرفة

← في الامتحان المعادلات سوف تكون معطى، مش مطالب احفظها

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h}, \quad b_i = \frac{M_i}{2}$$

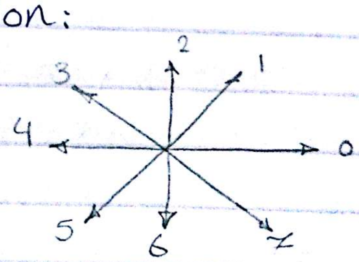
$$d_i = y_i$$

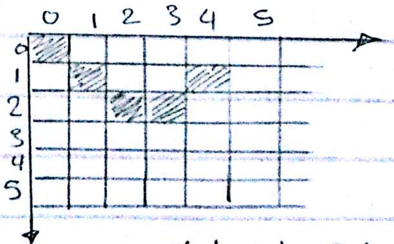
$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{6}(M_{i+1} + 2M_i)$$

$$** \; M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2} = \frac{6}{h^2}(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})$$

EX: Use cubic spline interpolation to find mathematical form for digital curve given by directional encode 7701 start at (0,0)

solution:





x	0	1	2	3	4
y	0	1	2	2	1

$$S(x)=\begin{cases} a_0(x-0)^3+b_0(x-0)^2+c_0(x-0)+d_0 & 0\leq x\leq 1\\ a_1(x-1)^3+b_1(x-1)^2+c_1(x-1)+d_1 & 1\leq x\leq 2\\ a_2(x-2)^3+b_2(x-2)^2+c_2(x-2)+d_2 & 2\leq x\leq 3\\ a_3(x-3)^3+b_3(x-3)^2+c_3(x-3)+d_3 & 3\leq x\leq 4\end{cases}$$

$\rightarrow M_i+4M_{i+1}+M_{i+2}=\frac{6}{h^2}(y_i-2y_{i+1}+y_{i+2})$

$\rightarrow M_0=0 \qquad M_4=0$

- Let $i=0$ $\quad M_0+4M_1+M_2=\frac{6}{(1)^2}(y_0-2y_1+y_2)$

$4M_1+M_2=0 \longrightarrow ①$

let $i=1$ $\quad M_1+4M_2+M_3=\frac{6}{1^2}(y_1-2y_2+y_3$

$M_1+4M_2+M_3=-6 \longrightarrow ②$

let $i=2$ $\quad M_2+4M_3+M_4=\frac{6}{1^2}(y_2-2y_3+y_4)$

$M_2+4M_3=-6 \longrightarrow ③$

بحل 1,2,3 على calculator:

$M_0=0 \qquad M_1=0.3 \qquad M_2=1.3 \qquad M_3=-1.2 \qquad M_4=0$

$\rightarrow a_i=\frac{M_{i+1}-M_i}{6h}=\frac{0.3}{2}=.05 \longrightarrow a_0$

$a_1=.27 \qquad a_2=.02$

$a_3=.2$

$\rightarrow b_i=\frac{M_i}{2}$, $b_0=0 \qquad b_1=\frac{.3}{2}$

$b_2=\frac{-1.3}{2} \qquad b_3=\frac{-1.2}{2}$

$\rightarrow d_i=y_i \qquad d_0=0 \qquad d_1=1$

$d_2=2 \qquad d_3=2$

$\rightarrow c_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-\frac{h}{6}(M_{i+1}+2M_i)$

$c_0=1.95 \qquad c_1=1.12$

$c_2=0.63 \qquad c_3=-0.6$

- Numerical differentiation

في هذا الجزء نحاول ايجاد المشتقة الاولى لنقط متقطعة وغير معلوم الدالة الاصلية لهذه النقط بطرق عددية

1 Forward divided difference for first derivative.

← هذه الطرق تعتمد على مفكوك تايلور وفى مفكوك تايلور نعتمد على $(x - x_0)$ ان x_0 قريبة جداً من x بحيث انه عند زيادة الحدود يكون الفرق صغير جداً ومرفوع لأس كبير ∴ يؤول الرقم الى صفر

$$f(x+h) \simeq f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi)$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!} f''(\xi)$$

القانون ← الخطأ ع الحساب

$$x \leq \xi \leq x+h$$

Forward 1st derivative

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ حفظ

$$\text{Trunction error} \simeq \left| \frac{h f''(\xi)}{2!} \right|$$ حفظ

$f''(\xi)$ ← اكبر قيمة للمشتقة الثانية

2 Backward 1st derivative

$$f(x-h) \simeq f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi)$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!} f''(\xi)$$

القانون ← الخطأ

$$\text{Trunction error} \simeq \left| \frac{h}{2!} f''(\xi) \right|$$

← اعلى قيمة للمشتقة الثانية

3 Center devided 1st derivative

$$f(x+h) \simeq f(x) + f'(x) h + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x)$$

$$f(x-h) \simeq f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x)$$

بالطرح

$$f(x+h) - f(x-h) \simeq 2h f'(x) + \frac{2h^3}{3!} f'''(\xi)$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(\xi)$$

القانون ← الخطأ

$$\text{Trunction error} \simeq \left| \frac{h^2}{3!} f'''(x) \right|$$

← اعلى قيمة للمشتقة الثالثة

Ex: find $f'(0.1)$, $f'(0.5)$ from

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	2	6	10	12	15

← ملحوظة :-

- قانون المشتقة الاولى الامامى لا يصلح فى حالة المشتقة عند آخر خانة "لانه مفيش بعدها عناصر".
- وقانون المشتقة الاولى الخلفى لا يصلح مع اول خانة "لا يوجد قبلها عناصر"

$$f'(0.1) = \frac{6-2}{.1} = 40$$

$$f'(0.5) = \frac{15-12}{.1} = 30$$

Ricardson Extrapolation Algorithm

طريقة ريتشاردسون المشتقة الاولى

step1: input $f(x)$, N, M

step2: $m = 1 : M$, $n = 1 : N$

step3: Calculate

$$D_{n1} = a\left(\frac{h}{2^{n-1}}\right)$$

كيفية حل المسائل ب Ricardson

① نوجد

$$D_{11} = \bar{f}(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = a(h)$$

② نحسن قيم المشتقة الاولى باستخدام $h, h/2, h/4, h/8, \ldots$ فنوجد

$$D_{n,1} = a\left(\frac{h}{2^{n-1}}\right) =$$

$$D_{21} = a\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{2(h/2)}$$

$$D_{31} = a\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{f(x+h/4) - f(x-h/4)}{2(h/4)}$$

③ نكون جدول معلوم فيه العمود الاول

	$(4/3, -1/3)$	$(16/15, -\frac{1}{15})$
D_{11}		
D_{21}	D_{22}	
D_{31}	D_{32}	D_{33}
D_{41}	D_{42}	D_{34}

Ex ① use the following data

x	1.26	1.27	1.28	1.29	1.3	1.31	1.32	1.33	1.34
$f(x)$	9.5	10	11.59	13.78	14.09	14.31	16.86	17	.5

to find D_{33} by Ricardson extrapolation algorithm for $\bar{f}(1.3)$

اذا كان المطلوب في رأس المسأله حساب D_{22} حيث نأخذ h ضعف خطوة الجدول ونعوض في العمود الاول واذا كان مطلوب حساب D_{33} نأخذ h اربعة امثال خطوة الجدول ونعوض في العمود الاول

sol: $h = 4 * (0.01) = 0.04$

$$D_{11} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} , \quad x = 1.3$$

$$D_{11} = \frac{17.5 - 9.5}{2 * .04} = 100$$

$$D_{21} = \frac{f(x + h/2) - f(x - h/2)}{2(h/2)}$$

$$D_{21} = \frac{16.86 - 11.59}{2(.04/2)} = 131.75$$

$$D_{31} = \frac{f(x + h/4) - f(x - h/4)}{2(.04/4)}$$

$$D_{31} = \frac{14.31 - 13.78}{2(.04/4)} = 26.5$$

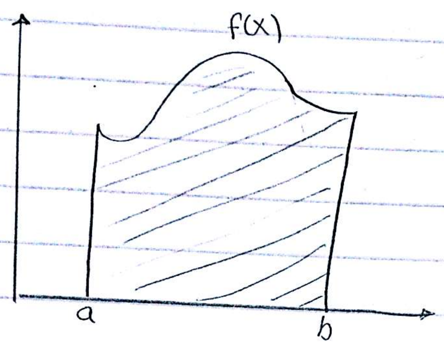
	$(4/3 \,,\, \frac{-1}{3})$	$(\frac{16}{15} \,,\, \frac{-1}{15})$
$D_1 = 100$		

$$\bar{f}(x) = a(h) + C_2 h^2 + C_4 h^4 + \dots \quad (1)$$

"Numerical Integration"

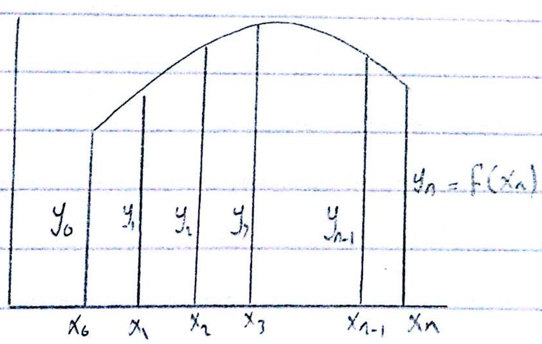
فى هذا الجزء نحاول ايجاد طرق لحساب التكامل بدون استخدام قواعده وذلك بتقسيم المساحه تحت المنحنى لاجزاء وتجميعها والهدف هو حساب

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$



$\boxed{1}$ Trapiziodal method

لتعين قيمه التكامل بهذه الطريقه تقسم فتره التكامل لخطوه طولها h حيث $\left(h = \frac{b-a}{n}\right)$ وتكون اشباه منحرفات فوق فترات التقسيم ونجمع مساحتها



الخطأ فى حساب قانون اشباه المنحرفات

$$E_T \leqslant \frac{(b-a)^2}{12} M_2 \quad , M_2 = \max|f''(x)|$$

اعلى قيمه للمشتقه الثانيه

$\boxed{2}$ Simpson rule

$$I_S = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + \cdots)\right]$$

$$E_S \leqslant \frac{(b-a)^4}{180} M_4 \; ; \; M_4 = \max|f^{(4)}(x)|$$

لابد ان يكون n عدد زوجى

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$\boxed{3}$ Weddle rule

151 6 151

$$h = \frac{b-a}{n}$$

لابد ان يكون n من مضاعفات (6)

For $n = 6$

$$I_W = \frac{3h}{10}\left[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6\right]$$

For $n = 12$ 151 6 151

151 6 151

$$I_W = \frac{3h}{10}\left[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6 + 5y_7 + y_8 + 6y_9 + y_{10} + 5y_{11} + y_{12}\right]$$

انتى مش زى الجميع. بسؤالك لون الربيع

محاولات كثير وفشلنا فيها

---

151 6 151

151 6 151

x by

$$I_T = \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \frac{y_2 + y_3}{2} h + \cdots$$

$$\cdots +$$

$$I_T = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\right]$$

$$I_T = \frac{h}{2}\left[\text{الاول} + \text{الاخير} + 2(\text{باقى الحدود})\right]$$

Ex : find $\int_0^1 e^{x^2} d$

① Trapiziodal
② simpson
③ Weddle

عايزين نحل المسالة بجدول واحد :

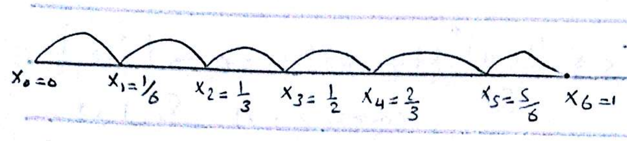
1) اول طريقة مفيش شرط على عدد التقسيمات

2) تاني طريقة لازم عدد التقسيمات يكون زوجي

3) تالت طريقة لازم عدد التقسيمات مضاعفات 6

الرقم اللي هيريحنا هو 6

$n = 6 \; ; \; h = \frac{b-a}{6} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$



$y = f(x) = e^{x^2}$

x_i	y_i	T-Code	S-Code	W-Code
0	1	1	1	1
1/6	1.028	2	4	5
1/3	1.117	2	2	1
1/2	1.284	2	4	6
2/3	1.559	2	2	1
5/6	2.003	2	4	5
1	2.71	1	1	1

17.692

$I_T = \frac{h}{2}(\Sigma xy)$

$= 1.47$

$I_S = \frac{h}{3}(26.322)$

$= 1.46$

$I_W = \frac{3h}{10}(29.245)$

$= 1.462$

mode
table
f(x) ...
AC
mode
stat
A+BX ← العمود الاول y_i
العمود التاني T. Code
AC
shift +1
Σxy
AC
shift +1
sum
data ← منها هنغير العمود بتاع T.Code وندخل S.Code

AC , shift +1 , sum , data

نشيل S.Code ونحط W.Code

8

مجالات كهرومغناطيسية

9

Rombarg Algorithm

* * كيفيه حل المسائل :

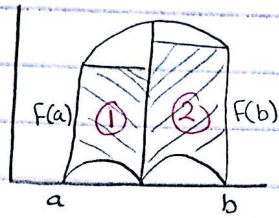
① نقسم فترة التكامل لخطوه طولها

$h = (b-a)/2^{k-1}$

فى الخطوه الاولى

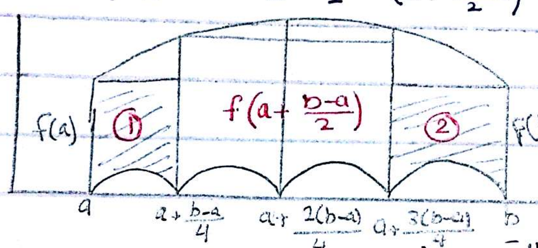
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$R_{11} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$



② تقسم المساحه تحت المنحنى بخطوه طولها $(b-a)/4$

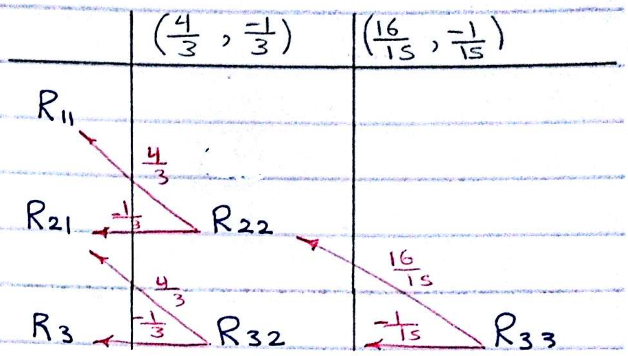
$$R_{21} = \frac{b-a}{4}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{b-a}{2} f\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$



اسلوب التقسيم :

نقسم بخطوه طولها $\frac{b-a}{4}$ ونجمع المساحات الاول لوحده والاخير لوحده واللى فى النص

$$R_{31} = \frac{b-a}{8}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{b-a}{2}\left[\left[f(a) + \frac{b-a}{4}\right] + \left[f(a) + \frac{b-a}{2}\right] + \left[f(a) + \frac{3(b-a)}{4}\right]\right]$$



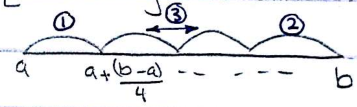
Example: Use Romberg algorithm to find R_{33} for: $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

Sol:

$F(x) = e^{x^2}$

$$R_{11} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] = \frac{1-0}{2}\left[f(0) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{0^2} + e^{1^2}\right] = 1.8591$$



$$R_{21} = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + f(b)\right] + \frac{b-a}{2} f\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{0} + e^{1}\right] + \frac{1}{2} e^{(.5)^2} = 1.75393$$

	$\frac{4}{3}$, $\frac{-1}{3}$	$\frac{16}{15}$, $\frac{-1}{15}$
R_{11}		
R_{21}	$R_{22} = 1.7188$	
R_{31}	$R_{32} = 2.384$	$R_{33} = 2.428$

Example: Deduce the Form of Romberg recursive

$$R_{k,m} = \frac{4^{m-1}}{4^{m-1}-1} R_{k,m-1} - \frac{1}{4^{m-1}-1} R_{k,m-1}$$

Sol: From Trapezoidal rule

$$\int f(x)\,dx \simeq \frac{k}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right] + E_T$$

$$E_T \le \frac{(b-a)}{12} h^2 \, Max\left|f''(x)\right| \rightarrow E_T \propto h^2$$

$N = 2^{k-1}$, $h = \frac{b-a}{2^{k-1}}$, $k = 1, 2, \dots$

$$I = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right] + C_2 h^2 + C_4 h^4 + \dots$$

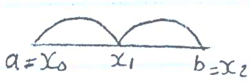
at $k = 1 \longrightarrow N = 1$, $h = b-a$

$$R_{11} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$I = R_{11} + C_2 h^2 + C_4 h^4 + \dots \quad (1)$$

at $k = 2 \longrightarrow N = 2$

$$R_{21} = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{1} f(x_i) + f(x_{i+1})$$



$$= \frac{b-a}{4}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$* R_{21} = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + F(b)\right] + \frac{b-a}{2} f\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

$$I = R_{21} + C_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + C_4\left(\frac{h}{4}\right)^2 + \dots \quad (2)$$

← $h = b-a$ في المعادله ① عند تبديل h بـ $h/2$

∴ $h = \frac{b-a}{2}$ تتحول الصوره ① الى ②

$$I = R_{21} + C_2 \frac{h^2}{4} + C_4 \frac{h^4}{16} + \dots$$

← بحل المعادله ② مع ① لنحذف h^2

وضرب ② * 4 وطرحها من ①

$$3I = 4R_{21} - R_{11} + C_4 h^4\left(\frac{4}{16} - 1\right) + \dots$$

$$I = \frac{4}{3} R_{21} - \frac{1}{3} R_{11} - \frac{1}{4} C_4 h^4 + \dots$$

$$* R_{22} = \frac{4}{3} R_{21} - \frac{1}{3} R_{11}$$

similarly if we replace $\frac{h}{2}$ in (2) and eliminate h^2 ...

From (2), (1)

$$* R_{32} = \frac{4}{3} R_{31} - \frac{1}{3} R_{21}$$

then: $R_{k,m} = \frac{4^{m-1}}{4^{m-1}-1} R_{k,m-1} - \frac{1}{4^{m-1}-1} R_{k,m-1}$

→ **Numerical solutions of ordinary differential equation**

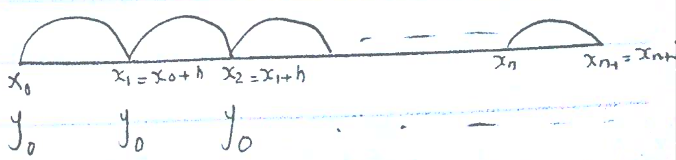
الحلول العدديه للمعادلات التفاضليه العاديه

هذا الجزء سوف ندرس كيفيه حل الصوره العامه للمعادله التفاضليه من الرتبه الاولى

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

[1] Taylor aproximation method

من مفكوك تايلور عند تقسيم فتره الحل بخطوه طولها :



$I = \int_a^b$

$E_T \le (b$

$N = 2^{k-1}$

$I = \frac{h}{2}$

at $x =$

$* R_{11} = b$

$I = R_{11}$

at $x =$

$R_{21} = \frac{h}{2}$

$= \frac{b-}{4}$

$* R_{21} = \frac{b}{4}$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots$$

$$y(x_0+h) = y(x_0) + h\,y'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \dots$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n - y_{n+1}) + \frac{(.2)^2}{2!}(y_n - x_n)$$

put $n = 0, 1$

$$y_1 = y_0 + 0.2(x_0 - y_0 + 1) + \frac{0.2^2}{2}(y_0 - x_0) = .2$$

$$y_2 = y_1 + 0.2(x_1 - y_1 + 1) + \frac{.2^2}{2}(y_1 - x_1) = .4$$

$$-\; y_1 = y_0 + h\,y'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \dots$$

$$-\; y_2 = y_1 + h\,y'_1 + \frac{h^2}{2!}y''_1 + \dots$$

$$\vdots$$

$$-\; y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \dots$$

اذا كان:

$$y' = f(x,y) \qquad y'_n = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n) + \dots$$

$$y_{n+1} = y_n + h\Big[\underbrace{f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} f'(x_n, y_n) + \dots}_{T(x_n, y_n)}\Big]$$

→ Taylor of 1st order

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

→ Taylor of 2nd order

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n)$$

Example find approximate solution of $y' = x - y + 1$ $\quad 0 \le x \le 0.4$ by Taylor method of 2nd order ; $h = 0.2$; $y(0) = 0$

sol: $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n)$

$x_0 = 0 \qquad x_1 = .2 \qquad x_2 = .4 \qquad y(0) = 0 \quad (x_0, \; y_0)$

$$y' = f(x,y) = x - y + 1$$

$$f'(x,y) = 1 - \frac{dy}{dx} - 0$$

$$f'(x,y) = 1 - (x - y + 1) = y - x$$

بالتعويض في المعادلة العامة 2nd ord.

$$\therefore y_1 = y(0.2) = 0.2$$

$$\therefore y_2 = y(0.4) = 0.4$$

"System of O.D. eqn"

ن النظام من المعادلات التفاضلية

صوره:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad z(x_0) = z_0$$

ل بـ Taylor على الصوره

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n, z_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, \dots$$

$$z_{n+1} = z_n + h\,g(x_n, y_n, z_n) + \frac{h^2}{2!} g'(\dots$$

اذا كا

على ال

يمكن حلها

$y_n, z_n)$

x_n, y_n, z_n